M1-MIS, Université Bretagne Sud — Année 2007 – 2008
Cours Traitement Numérique de l'Information

TP 3 - Transformée en z

Rappels

On considère ici une classe de transformées en z de la forme :

$$H(z)=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_M z^{-M}}{a_0+a_1 z^{-1}+\ldots+a_N z^{-N}}$$

Elles représentent des systèmes récursifs décrits par des équations aux différences à coefficients constants. La transformée en z est une **fonction complexe** de la variable z = Re(z) + jIm(z). Par conséquent, le module |H(z)| est une fonction réelle et positive de Re(z) et Im(z), et il décrit une **surface** qui peut être représentée en 3D : (Re(z), Im(z), |H(z)|).

Les racines du numérateur et du dénominateur sont appelées respectivement **zéros et pôles de H(z)**. En général, il y a toujours le même nombre de pôles et de zéros.

En matlab, les pôles et les zéros peuvent être visualisés dans le plan complexe par la fonction ***zplane***. Les fonctions de transfert en *z* peuvent être représentées pour différentes valeurs de *z*, sur une grille de points dans le plan complexe par la fonction ***zplot*** suivante :

```
function [Hz, zgrid] = zplot(b, a, N, zmax)
    zreal = ones(2*N+1, 1) * (-zmax : (zmax/N) : zmax) ;
    zgrid = zreal + j*zreal' ;
    Hz = zgrid .^ (length(a) – length(b)) .* polyval(b, zgrid) ./ polyval(a, zgrid) ;
    mesh(zreal, zreal', 20*log10(abs(Hz))) ;
```

Exercice 1

Soit le système à temps discret défini par l'équation d'entrée-sortie suivante :

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k),\ \ avec\ \ b_k=1/(M+1)$$

1. Quelle est la nature de ce système ?
   Quelle est la signification de ce filtre ?

2. Donnez l'expression de la transformée en *z* de ce système.

   Evaluez ce résultat pour M=9, en utilisant les commandes Matlab suivantes :

```
M = 9 ;
b = ones(M+1,1)/(M+1) ;  a = 1 ;
zplot(b, a, 30, 1.5) ;
```

3. Déterminez les zeros de H(z) en utilisant la commande roots(b).
   Quels sont les pôles dans ce cas ?

4. Tracez la surface caractérisant le module |H(z)|, la position des pôles et des zéros, ainsi que la réponse en fréquence du filtre.

Exercice 2

Soit le filtre IIR du premier ordre défini par l'équation aux différences :

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + x(n) = \sum_{k=0}^{n} -a_1^k x(n-k), \quad avec \quad y(-1) = 0$$

1. Quelle est la réponse impulsionnelle h(n) de ce filtre ?

2. Déterminez la transformée en z de ce filtre.

3. Evaluez le résultat pour a1=0.9

4. Que se passe-t-il si le pôle est en dehors du cercle unité ? Prendre par exemple a1=1.1